FHW, ZSEBY, ANALYSIS

1. Zinseszinsrechnung

1.0 Potenzen, Logarithmen, Grenzwerte, die Zahl e
1.1 Probleme bei einmaliger Zahlung
1.2 Probleme bei regelmäßiger Zahlung (Effektivzinssatz)
1.3 PC-Unterstützung

2. Funktionen in der Ökonomie

2.0 Beispiele: quadratische Funktionen, Exponentialfunktion
2.1 Darstellung von Funktionen (analytisch, tabellarisch, grafisch)
2.2 Bestimmung von Nullstellen, nichtlineare Gleichungen, das Sekantenverfahren
2.3 Umkehrfunktion
2.4 PC-Unterstützung

3. Differentialrechnung

3.1 Die Ableitung einer Funktion
3.2 Ableitung elementarer Funktionen
3.3 Ableitungsregeln
3.4 PC-Unterstützung

4. Optimierung

4.0 Beispiele: Lagerhaltung, Preisgestaltung, Optimale Nutzungsdauer
4.1 Funktionen einer Veränderlichen
4.2 Funktionen mehrerer Veränderlicher
4.3 Optimierung unter Nebenbedingungen

1.0 Potenzen, Logarithmen, Grenzwerte, die Zahl e

1.0.1 Potenzen

(1) $a^3 = a \cdot a \cdot a$ (3-mal als Faktor), $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n-mal als Faktor)

Dies ist eine "Definition", eine Vereinbarung. Als Folgerung daraus ergeben sich die Rechenregeln:

(2) $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
(3) $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. $a \in R, n \in N$

Die Ausdrücke $a^{-2}, a^0, a^{\frac{1}{2}}$
lassen sich mit der obigen Definition nicht erklären, denn was sollte denn bedeuten
"a (-2)-mal oder 0-mal oder (1/2)-mal als Faktor hingeschrieben" ?

Man versucht nun solche Potenzen so zu definieren, dass die bisherigen Rechenregeln weiterhin gelten. ("Trägheitsgesetz der Mathematiker", kurz: TdM). Es ist nun einerseits
(4a) $\frac{a^3}{a^2} = a$, andererseits nach dem TdM: (4b) $a^3 \cdot a^{-2} = a^{3-2} = a$

Durch Vergleich erkennt man, dass folgende **Definition** zweckmäßig ist:
(4c) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $(a \neq 0)$.

Ebenso:
(5a) $\frac{a^3}{a^3} = 1$ (5b) $a^3 \cdot a^{-3} = a^{3-3} = a^0$

Durch Vergleich erkennt man, dass folgende **Definition** zweckmäßig ist:
(5c) $a^0 = 1 (a > 0)$.

Ebenso:
(6a) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ (6b) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$.

Durch Vergleich erkennt man, dass folgende **Definition** zweckmäßig ist:
(6c) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ Allgemeiner: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \left(a > 0\right)$.

1.0.2 Logarithmen

Einstieg: $10^3 = 1000, \quad 10^x = 100000, \quad 10^x = a \quad (x = ?)$

Der Zehnerlogarithmus einer Zahl a ist diejenige Zahl x, mit der man 10 potenzieren muss, um a zu erhalten. Beispiele:

$10^2 = 100, \quad 10^1 = 10, \quad 10^0 = 1 \quad , \quad 10^{-1} = 0.1, \quad 10^{-3} = 0.001$

$\log 100 = 2, \quad \log 10 = 1, \quad \log 1 = 0 \quad , \quad \log 0.1 = -1, \quad \log 0.001 = -3$.

Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen erklärt, denn es gibt ja keine Zahl x derart, dass $10^x < 0$ ist. Anstelle der 10 lässt sich auch jede andere positive Zahl als Basis verwenden.

Wurzelziehen und Logarithmieren sind die beiden Umkehrungen des Potenzierens.

Z.B. mit der Quadratwurzel: Drückt man nach Eingabe einer Zahl in den Taschenrechner zuerst auf die Quadriertaste und anschließend auf die Wurzeltaste, so erhält man die ursprüngliche Zahl zurück. Man darf die Reihenfolge dabei auch umkehren (also: zuerst die Wurzel ziehen und dann quadrieren):

$$\sqrt{x^2} = x, \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \qquad (x \geq 0).$$

Drückt man nach Eingabe einer Zahl zuerst auf die Taste 10^x und anschließend auf die Taste log x, so erhält man die ursprüngliche Zahl zurück. Auch hier darf man die Reihenfolge vertauschen.

$$\log 10^x = x, \quad 10^{\log x} = x \qquad (x \geq 0).$$

Darauf beruhen auch die beiden Rechenregeln für Logarithmen. Zunächst als Zahlenbeispiele formuliert:

$$\log(100 \cdot 1000) = \log(100) + \log(1000)$$
$$\log(100^3) = 3 \cdot \log(100)$$ (an der Anzahl der Nullen zu erkennen).

Wegen

$$a = 10^{\log a} \quad \text{und} \quad b = 10^{\log b} \quad \text{ist}$$

(1) $\log(a \cdot b) = \log\left(10^{\log a} \cdot 10^{\log b}\right) = \log(10^{\log a + \log b}) = \log(a) + \log(b)$ und

(2) $\log(a^x) = \log\left(10^{\log a}\right)^x = \log(10^{x \cdot \log a}) = x \cdot \log a$.

Man darf Gleichungen "logarithmieren", auf beiden Seiten den Logarithmus bilden, d.h.

$\log a = \log b$ gilt genau dann, wenn auch $a = b$ ist.

Dies lässt sich verwenden, um Gleichungen zu lösen, bei denen die Unbekannte im Exponenten steht. Ein Beispiel:

$3^x = 100$	logarithmiert:
$\log 3^x = \log 100$	Rechenregel (2) angewandt:
$x \cdot \log 3 = 2$	dividiert:
$x = \dfrac{2}{\log 3} = \dfrac{2}{0.4771} = 4.19$	.

Ohne den Begrif des Logarithmus (und seine Verfügbarkeit auf dem Taschenrechner) hätten wir die obige Gleichung nur durch "Probieren" lösen können.

1.0.3 Grenzwerte

Beispiele: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $a_n = \dfrac{1}{n}$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\quad (n = 1,2,\ldots)$

Rentenendwert mit $p \to 0$: $\lim\limits_{q \to 1} r \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot n$ (Kap. 1.2.1)

Die Zahl g heißt **Grenzwert** der Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, wenn man zu jeder (noch so kleinen) **Toleranz t** eine (entsprechend große) **Nummer N(t)** angeben kann, so dass von N(t) ab alle Folgeglieder a_n innerhalb dieser Toleranz liegen:

$|a_n - g| < t$ für alle a_n mit n > N(t).

```
____*__________*__________*____
   g-t         g         g+t
```

Beispiele:

Folge a_n	Toleranz t	Nummer N
$\dfrac{n}{n+1}$	0.01 0.001	99 999
$\dfrac{1}{n}$	0.01 0.001	100 1000
$\dfrac{1}{2^n}$	0.01 0.001	7 10

1.0.4 Die Zahl e

Ein Kapital von einem Euro, das 100 % Zinsen pro Jahr bringt, wächst in einem Jahr auf zwei Euro. Bei halbjährlicher Verzinsung von jeweils 50 % ergeben sich am Ende des Jahres 2.25 €. Bei vierteljährlicher/monatlicher/täglicher (360 Tage) Verzinsung von jeweils
25% / 8.33% / 0.278% sind es

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2.44 \ , \qquad \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61 \ , \qquad \left(1+\frac{1}{360}\right)^{360} = 2.7145 \quad .$$

Wenn man sich nun vorstellt, dass das Kapital nicht nur täglich oder stündlich, sondern kontinuierlich verzinst wird, so ergibt sich die Zahl e.

Aus der Definition erkennt man, dass man auf diese Weise die Zahl e niemals ganz genau angeben kann. Auf der anderen Seite kann man jedoch jeden beliebige Genauigkeitswunsch erfüllen, notfalls auch auf 10 Dezimalstellen. Man muss dann eben eine entsprechend feine Unterteilung der Zeit wählen.

Mit Hilfe des Grenzwertbegriffs lässt sich nun diese Definition präzisieren:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad .$$

Das kontinuierliche Wachstum kommt in der Natur häufig vor. Z.B. halten sich Viren selten an Zinstermine.

Für die Logarithmen hat neben der Basis 10 noch die Basis **e** eine wesentliche Bedeutung. Logarithmen zur Basis e heißen "Natürliche Logarithmen", abgekürzt: **ln** .

Der Natürliche Logarithmus einer Zahl a ist also diejenige Zahl x, mit der man **e** potenzieren muss, um a zu erhalten. Beispiele:

$e^2 = 7.39, \qquad e^1 = 2.71, \qquad e^0 = 1 \quad , \qquad e^{-1} = 0.37, \qquad e^{-3} = 0.050$

$\ln 7.39 = 2, \qquad \ln\ e = 1, \qquad \ln 1 = 0 \quad , \qquad \ln 0.37 = -1, \qquad \ln\ 0.050 = -3 \ .$

Der natürliche Logarithmus erfüllt dieselben Rechenregeln wie der Zehnerlogarithmus. Auch unsere Gleichung können wir mit dem natürlichen Logarithmus lösen:

$$
\begin{aligned}
3^x &= 100 && \text{logarithmiert:} \\
\ln 3^x &= \ln 100 && \text{Rechenregel (2) angewandt:} \\
x \cdot \ln 3 &= \ln 100 && \text{dividiert:} \\
x = \frac{\ln 100}{\ln 3} &= \frac{4.61}{1.099} = 4.19 \quad .
\end{aligned}
$$

1.1 Probleme bei einmaliger Zahlung

Ein Kapital K_0 wird zu einem Zinssatz p angelegt. Anstelle von p verwendet man auch den "Wachstumsfaktor" $q = 1+p$.

Die "iterative" Form des Modells beschreibt, wie sich der Zustand eines Systems von einem Zeitpunkt (Jahr, Monat) zum nächsten Schritt für Schritt weiterentwickelt:

(1) $\boxed{K_n = K_{n-1} \cdot q}$.

Die "finale" Form des Modells beschreibt, wie sich der Zustand eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt (Jahr, Monat) direkt ermitteln lässt:

(2) $\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$.

In dieser Grundform ist die Formel geeignet, zu gegebenen Werten für Anfangskapital, Zinssatz (bzw. Wachstumsfaktor) und Laufzeit das Endkapital zu ermitteln.

Beispiel: $K_0 = 10000, \quad q = 1.08, \quad n = 6$ ergibt $K_6 = 10000 \cdot 1.08^6 = 15868.74$

Durch Umstellen der Formel lässt sich auch das erforderliche Anfangskapital, die Laufzeit oder der Zinssatz ermitteln, wenn jeweils die anderen drei Größen gegeben sind:

(3) $K_0 = \dfrac{K_n}{q^n}$. (4) $n = \dfrac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln q}$ (5) $q = \left(\dfrac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}}$.

1.2 Probleme bei mehrmaliger Zahlung (Effektivzinssatz)

1.2.0 Die abbrechende geometrische Reihe

Die Behandlung der Probleme bei mehrmaliger Zahlung basiert auf der Summenformel für die abbrechende geometrische Reihe

(1) $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Beispiel (n=3):

(1a) $1 + q + q^2 = \dfrac{q^3 - 1}{q - 1}$.

Den Beweis erhält man durch Ausmultiplizieren. Wir führen ihn für n=3:
$\left(1+q+q^2\right)\cdot\left(q-1\right)=(q+q^2+q^3)-(1+q+q^2)=q^3-1.$

1.2.1 Rentenendwert bei jährlicher nachschüssiger Zahlung

Ein Betrag r wird regelmäßig am Ende jedes Jahres ("nachschüssig") eingezahlt und mit dem jährlichen Zinssatz p (Wachstumsfaktor q) verzinst. K_n ist der Betrag, der sich bis zum Ende des n-ten Jahres ergeben hat.

Die "iterative" Form des Modells beschreibt, wie sich der Zustand eines Systems von einem Zeitpunkt (Jahr, Monat) zum nächsten Schritt für Schritt weiterentwickelt:

$$(1) \qquad K_n = K_{n-1}\cdot q + r \quad (n=1,2,\ldots), \quad K_0 = 0. \; .$$

Die "finale" Form des Modells beschreibt, wie sich der Zustand eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt (Jahr, Monat) direkt ermitteln lässt. Der Endbetrag heißt **"Rentenendwert"**. Wir bezeichnen ihn, um die Situation von der einmaligen Zahlung zu unterscheiden, mit ***REW*** und ermitteln ihn zunächst für den Spezialfall n=3:

Die dritte Zahlung (am Ende des dritten Jahres) wird gar nicht verzinst. Die zweite Zahlung wird ein Jahr lang und die erste Zahlung wird zwei Jahre lang verzinst:

$$REW = r + rq + rq^2 = r\cdot(1+q+q^2) = r\cdot\frac{q^3-1}{q-1}$$

Für eine beliebige Laufzeit n ergibt sich der Rentenendwert bei jährlicher nachschüssiger Zahlung nach der Formel

$$(2) \qquad REW = r\cdot\frac{q^n-1}{q-1} \; .$$

Beispiel: $r = 2400, \quad q = 1.08, \quad n = 6$ ergibt $REW = 2400\cdot\frac{1.08^6-1}{1.08-1} = 17606.23$

1.2.2 Rentenendwert und Rentenbarwert bei allgemeineren Zahlungsarten

Eine vorschüssige Zahlung (jeweils am Anfang des Jahres) vom Betrag r kann man wie eine nachschüssige Zahlung rq (einmal verzinst) ansehen. Daher erhält man hierfür

$$(1) \qquad REW = rq\cdot\frac{q^n-1}{q-1} \quad \text{(vorschüssig).}$$

Man kann beide Formen (nachschüssig und vorschüssig) durch eine einzige Formel ausdrücken, wenn man eine Variable v einführt:

$$v = \begin{cases} 0, & \text{nachschüssig} \\ 1, & \text{vorschüssig} \end{cases}$$

$$\boxed{(2) \qquad REW = rq^v \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad .}$$

Bei monatlicher (vor- bzw. nachschüssiger) Zahlungsweise muss man beachten, dass in der Formel der monatliche Zinssatz verwendet werden muss und die Laufzeit n in Monaten anzugeben ist. Die Umrechnung zwischen monatlichem und jährlichem Zinssatz beruht darauf, dass der jährliche Zinssatz einer zwölfmaligen monatlichen Verzinsung (mit Zinseszins!) entspricht:

$$\boxed{(3) \qquad q_j = q_m^{\ 12}, q_m = (q_j)^{\frac{1}{12}} \quad .}$$

Wegen $1.01^{12} = 1.1268$ entspricht ein monatlicher Zinssatz von 1% einem jährlichen Zinssatz von 12.68 %, und wegen $(1.12)^{\frac{1}{12}} = 1.009489$ entspricht ein jährlicher Zinssatz von 12 % einem monatlichen Zinssatz von 0.9489 %.

Beispiel: $r = 200, \quad q_j = 1.08, \quad n = 72$ Monate

Dies ergibt zunächst einen **monatlichen** Wachstumsfaktor
$q_m = (1.08)^{\frac{1}{12}} = 1.006434$, also einen monatlichen Zinssatz von 0.6434 %. Damit ergibt sich der Rentenendwert

$$REW = 200 \cdot \frac{1.006434^{72} - 1}{1.006434 \quad - 1} = 18242.80 \ .$$

Der **Rentenbarwert *RBW*** ergibt sich aus dem Rentenendwert dadurch, dass man denjenigen Betrag sucht, der als Barwert nach der Laufzeit den Rentenendwert ergibt.

Entsprechend der Formel für die einmalige Zahlung
$K_n = K_0 \cdot q^n$ ist $REW = RBW \cdot q^n$, also

$$\boxed{(4) \qquad RBW = \frac{REW}{q^n} = rq^v \cdot \frac{q^n - 1}{(q-1)q^n} \quad .}$$

1.2.3 Umformung der Rentenendwertformel

Die Rentenendwertformel lässt sich nach r bzw. nach n auflösen:

$$(1) \qquad r = \frac{REW \cdot (q-1)}{q^v (q^n - 1)} \quad .$$

$$(2) \qquad n = \frac{\ln\left(\frac{REW \cdot (q-1)}{rq^v} + 1\right)}{\ln q} \quad .$$

Die Auflösung nach q ist i.a. nicht möglich, d.h. es gibt keine allgemeine Formel, die den zugrundeliegenden Zinssatz liefert, wenn man eine regelmäßige Zahlung r über eine Laufzeit n entrichtet und ein Rentenendwert *REW* erzielt wird.

Wenn man danach fragt, wielange es dauert, bis ein einmaliger Betrag (Darlehen) durch regelmäßige Zahlungen ausgeglichen wird, löst man die Rentenbarwertformel nach n auf:

$$(3) \qquad n = \frac{\ln\left(\frac{rq^v}{rq^v - RBW(q-1)}\right)}{\ln q} \quad .$$

1.2.4 Die "Laufzeitmethode"

Mit Hilfe der "Laufzeitmethode" kann man eine Näherungsformel für die Berechnung des Rentenendwertes angeben. Man ersetzt die n regelmäßigen Zahlungen des Betrages r durch eine einmalige Zahlung vom Betrag $n \cdot r$ und verwendet eine mittlere Laufzeit. Die mittlere Laufzeit ist

$T = \frac{n-1}{2}$ bei n nachschüssigen Zahlungen und

$T = \frac{n+1}{2}$ bei n vorschüssigen Zahlungen.

$T = \frac{n-1+2v}{2}$ bei n nachschüssigen oder vorschüssigen Zahlungen.

Damit wird der Rentenendwert

$$(1) \qquad REW = r \cdot q^v \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \approx (r \cdot n) \cdot q^T = (r \cdot n) \cdot q^{\frac{n-1+2v}{2}} \quad .$$

Beispiel: $r = 2400, \quad q = 1.08, \quad n = 6$ (nachschüssig) ergibt $REW = 6 \cdot 2400 \cdot 1.08^{2.5} = 17455.08$
.

Im Gegensatz zur exakten Formel für den Rentenendwert lässt sich die Näherungsformel auch nach dem Zinssatz q auflösen:

(2) $$q = \left(\frac{REW}{n \cdot r} \right)^{\frac{2}{n-1+2v}} .$$

1.2.5 Der Effektivzinssatz

Durch Vergleich einer einmaligen Zahlung (Darlehen, Barzahlung) mit einer regelmäßigen Zahlung (Tilgung, Ratenzahlung) lässt sich ermitteln, welcher Zinssatz einem solchen Geschäft zugrundegelegt wird:

$$rq^v \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = K_0 q^n \quad \text{bzw.}$$

(1) $$rq^v \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} - K_0 q^n = 0 \ .$$

Auch hier ist **die Auflösung nach q i.a. nicht möglich,** d.h. es gibt keine allgemeine Formel, die den zugrundeliegenden Effektivzinssatz liefert, um eine einmalige Zahlung mit einer regelmäßigen Zahlung zu vergleichen.

Einen Ausweg bietet die Laufzeitmethode, nach der man die regelmäßige Zahlung durch eine einmalige Zahlung mittlerer Laufzeit ersetzt:

$$REW = r \cdot q^v \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \approx (r \cdot n) \cdot q^T = (r \cdot n) \cdot q^{\frac{n-1+2v}{2}}$$

Ersetzt man nun in (1) den Rentenendwert durch die Näherung, so erhält man

(2) $$(r \cdot n) \cdot q^{\frac{n-1+2v}{2}} - K_0 q^n = 0 \, .$$

Diese Gleichung lässt sich nach q auflösen, und man erhält einen Näherungswert für den Effektivzinssatz:

(3) $$q_1 = \left(\frac{r \cdot n}{K_0} \right)^{\frac{2}{n+1-2v}} .$$

Aufgabe:

Ein Darlehen von 10 000 € soll innerhalb von 6 Jahren zurückgezahlt werden. Folgende Fälle sind zu untersuchen:

(a) am Anfang jedes Jahres (= vorschüssig) 2400 €,
(b) am Anfang jeden Monats (= vorschüssig) 200 €,
(c) am Ende jeden Monats (= nachschüssig) 200 €.

Ermitteln Sie den Effektivzinssatz durch "Probieren".

Dabei sind im Fall (a) zwei Bezugszeitpunkte zu wählen:

(1) das Ende des sechsten Jahres (Rentenendwert),
(2) der Anfang des ersten Jahres (Rentenbarwert).

In den Fällen (b) und (c) soll mit dem Rentenbarwert gearbeitet werden.

1.3 PC-Unterstützung

	A	B	C	D
1	Zinseszins, nachschüssig			
2				
3	10000	= K0		
4	2400	= r		
5	1,08	= q		
6				
7	n	Kn	REW	Differenz
8	0	10000,00	0,00	10000,00
9	1	10800,00	2400,00	8400,00
10	2	11664,00	4992,00	6672,00
11	3	12597,12	7791,36	4805,76
12	4	13604,89	10814,67	2790,22
13	5	14693,28	14079,84	613,44
14	6	15868,74	17606,23	-1737,49
15	7	17138,24	21414,73	-4276,49
16	8	18509,30	25527,91	-7018,60

	A	B	C	D
7	n	Kn	REW	Differenz
8	0	=$A$3*$A$5^A8	=$A$4*($A$5^A8-1)/($A$5-1)	=B8-C8
9	=A8+1	=$A$3*$A$5^A9	=$A$4*($A$5^A9-1)/($A$5-1)	=B9-C9
10	=A9+1	=$A$3*$A$5^A10	=$A$4*($A$5^A10-1)/($A$5-1)	=B10-C10