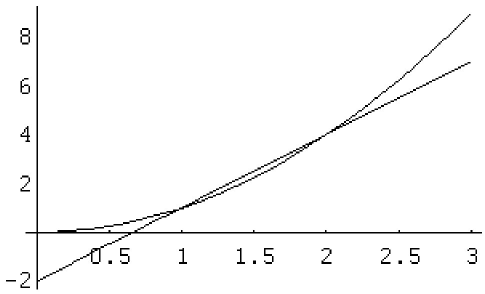
3. Differentialrechnung

3.1 Die Ableitung einer Funktion

3.1.1 Der Differenzenquotient

Wir gehen aus von der Funktion $y = x^2$ und stellen uns zunächst die Aufgabe, die Steigung der Sekante im Bereich $1 \le x \le 2$ zu ermitteln. Da die zugehörigen Funktionswerte $y(1) = 1$ und $y(2) = 4$ sind, ergibt sich die Steigung der Sekante unmittelbar zu $\frac{4-1}{2-1} = 3$.



Für zwei beliebige Punkte einer Funktion $y = f(x)$ ergibt sich die Steigung der Sekante als Quotient aus der Differenz der y-Werte und der Different der x-Werte:
$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Bezeichnet man diese Differenzen mit Δx und Δy, so erhält man weitere Darstellungsarten. Wenn wir hervorheben möchten, dass dieser Differenzenquotient der Funktion von der Ausgangsposition x und der Schrittweite Δx abhängt, schreiben wir:

$$DQ(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Für $y = x^2$ ergibt sich

$$DQ(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2\cdot x\cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

und für $\Delta x \neq 0$ durch Kürzen

$$DQ(x,\Delta x) = 2x + \Delta x .$$

Um die Abhängigkeit des Differenzenquotienten $DQ(x, \Delta x)$ von x und Δx zu verdeutlichen, lassen sich für verschiedene Werte von x und Δx die zugehörigen Differenzenquotienten in einer Wertetabelle darstellen. Hierbei sind auch bereits die "Randwerte" vorbereitet, in der zum einen x bzw. Δx variabel gelassen wurden und zum anderen die Grenzwerte $\Delta x \to 0$ anzugeben sind.

Δx / x	1	0.1	0.01	Δx	→ 0
0					
1	3				
2					
x				2x+Δx	

3.1.2 Die Ableitung einer Funktion

Wenn man den Differenzenquotienten der Funktion $y = x^2$ an der Stelle x = 1 betrachtet, dann bleibt immer noch die Abhängigkeit von der Schrittweite Δx übrig:

(1) $DQ(1, \Delta x) = 2 + \Delta x$.

Dies gilt für jede beliebige Schrittweite $\Delta x \neq 0$. Für Δx = 0 gibt es keinen Differenzenquotienten, da man bei seiner Definition durch Δx dividieren musste. An der Formel (1) erkennt man jedoch, dass man durch hinreichend kleine Wahl von Δx mit dem Differenzenquotienten beliebig nahe dem Wert 2 kommt. Z.B. erhält man den Wert 2.001 mit einer Schrittweite Δx = 0.001. Mit anderen Worten: Der Grenzwert für $\Delta x \to 0$ ist 2. Diesen Grenzwert nennt man die Ableitung der Funktion $y = x^2$ an der Stelle x = 1 .

Für einen beliebigen x-Wert ist

(2) $DQ(x, \Delta x) = 2x + \Delta x$.

Der Grenzwert für $\Delta x \to 0$ ist 2x. Diesen Grenzwert nennt man die Ableitung der Funktion $y = x^2$ an der Stelle x und schreibt dafür $y' = 2x$.

Für eine beliebige Funktion $y = f(x)$ definiert man die Ableitung entsprechend:

$$(3) \qquad y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} DQ(x, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad .$$

Die Begründer der Differentialrechnung, Leibniz und Newton, hatten noch nicht unsere heutigen Symbole zur Verfügung. Sie rechneten mit "unendlich kleinen Größen". Aus historischen Gründen erklärt sich daher die Schreibweise

$$(4) \qquad y' = \frac{dy}{dx} \ ,$$

die wir auch heute noch verwenden. Dabei darf man diese Formel nicht als eine Berechnungsvorschrift für die Ableitung verstehen. Um dies zu verdeutlichen liest man die Formel nicht wie einen Bruch sondern als "dy **nach** dx" und meint damit nichts anderes als, dass y nach x abzuleiten ist. Wie dies zu geschehen hat, ist in der Formel (3) angegeben.

3.1.3 Ein Beispiel: Die Ableitung der Funktion $y = \ln x$

Um die Ableitung der Funktion $y = \ln x$ zu berechnen, müssen wir zunächst den Differenzenquotienten angeben und anschließend den Grenzwert für $\Delta x \to 0$ ermitteln:

$$DQ(x, \Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln \frac{x+\Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Dieser Ausdruck erinnert an $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, dessen Grenzwert für $n \to \infty$ wir kennen, nämlich die Zahl **e**.

Wir setzen daher $\frac{x}{\Delta x} = n$, woraus wir $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$ und $\frac{1}{\Delta x} = \frac{n}{x} = n \cdot \frac{1}{x}$ erhalten. Der Grenzwert $\Delta x \to 0$ entspricht dann dem Grenzwert $n \to \infty$.

Mit dieser Bezeichnung wird der Differenzenquotient

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot \frac{1}{x}} = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad .$$

Nun hat $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ den Grenzwert **e** . Daher hat $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ den Grenzwert ln e.

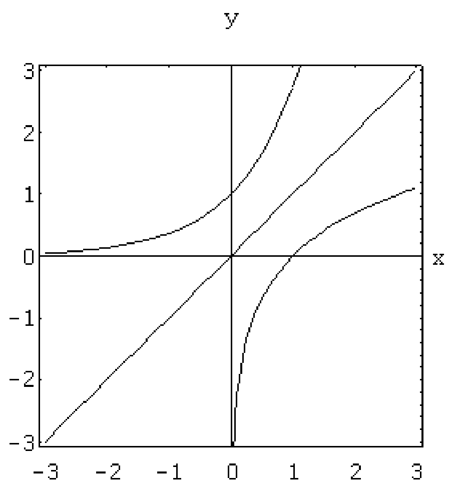
(Dies müsste man, genau genommen, ausführlicher begründen.)

Wegen ln e = 1 ergibt sich somit für den Grenzwert des Differenzenquotienten
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$.

Damit erhalten wir das Ergebnis:

Die Ableitung der Funktion $y = \ln x$ ist $y' = \frac{1}{x}$.

Aus der Ableitung der Funktion $y = \ln x$ lässt sich auch die Ableitung der Funktion $y = e^x$ ermitteln, da es sich um die Umkehrfunktion handelt. Stellt man beide Funktionen grafisch dar, so ist jede Funktion das Spiegelbild der anderen, wenn man sie an der Geraden y = x spiegelt.



Ein Punkt (x,y) = (a,b) bei der Funktion $y = \ln x$ mit der Steigung 1/a entspricht bei der Spiegelung einem Punkt (x,y) = (b,a) bei der Funktion $y = e^x$ mit der Steigung a , also einer Steigung, die ebenso groß ist wie der Funktionswert selbst. Wir erhalten das Ergebnis:

Die Ableitung der Funktion $y = e^x$ ist $y' = e^x$.

3.2 Ableitung elementarer Funktionen

Funktion y	**Ableitung** y'
x^n	nx^{n-1}
c (= *const*)	0
$ax + b$	a
$ax^2 + bx + c$	$2ax$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}\left(= -x^{-2}\right)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$

3.3 Ableitungsregeln

y	y'

Potenzregel

x^n	nx^{n-1}
1	0
x	1
x^2	$2x$
$x^{-1}\left(=\frac{1}{x}\right)$	$-x^{-2}\left(=-\frac{1}{x^2}\right)$
$x^{\frac{1}{2}}\left(=\sqrt{x}\right)$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left(=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

Faktorregel

$a\cdot f(x)$	$a\cdot f'(x)$
$5\cdot x^3$	$5\cdot 3x^2=15x^2$

Summenregel

$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$5x^3+2x$	$15x^2+2$
$x^2+\frac{1}{x}$	$2x-\frac{1}{x^2}$
$rp+\frac{rb}{x}+x$	$-\frac{rb}{x^2}+1$

Kettenregel

$y(u(x))$	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
$y=(5x+2)^2$ $y=u^2$ $u=5x+2$	$\frac{dy}{du}=2u$ $\frac{du}{dx}=5$ $\frac{dy}{dx}=2u\cdot 5=2(5x+2)\cdot 5$ $=50x+20$

y	y'
$y=\sqrt{5x+2}$ $y=\sqrt{u}$ $u=5x+2$	$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2\sqrt{5x+2}}$ $\frac{du}{dx}=5$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 5=\frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$

Produktregel

$u(x)\cdot v(x)$	$u'v+uv'$
$(2x+1)\cdot\sqrt{x}$ $u=2x+1$ $v=\sqrt{x}$	$u'=2$ $v'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $2\sqrt{x}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}$

Quotientenregel

$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$x^2+\frac{1}{x}=\frac{x^3+1}{x}$ $u=x^3+1$ $v=x$	$u'=3x^2$ $v'=1$ $\frac{3x^2\cdot x-(x^3+1)\cdot 1}{x^2}$ $=\frac{2x^3-1}{x^2}=2x-\frac{1}{x^2}$

Aufgabe 1: Einzelne Ableitungsregeln

Bilden Sie die Ableitung der Funktionen (1B)...(5B) entsprechend den Beispielen (1A)...(5A):

(1A) $y = x^4 - \sqrt{x}$

$y' = 4x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(1B) $y = \sqrt{x} + \ln x$

(2A) $y = \ln(1+3x)$

$y = \ln u \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$

$u = 1+3x \qquad \frac{du}{dx} = 3$

$y' = \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{3}{1+3x}$

(2B) $y = (2x-1)^3$

(3A) $y = e^{-x^2}$

$y = e^u \qquad \frac{dy}{du} = e^u$

$u = -x^2 \qquad \frac{du}{dx} = -2x$

$y' = e^u \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

(3B) $y = \sqrt{x^3 + 1}$

(4A) $y = x^2 e^x$

$u = x^2 \qquad u' = 2x$

$v = e^x \qquad v' = e^x$

$y' = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2+x)$

(4B) $y = x^2 \ln x$

(5A) $y = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

$u = \sqrt{x} \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = 2x+1 \qquad v' = 2$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+1) + \sqrt{x} \cdot 2}{(2x+1)^2}$$

$$y' = \frac{(2x+1) - 4x}{2\sqrt{x}(2x+1)^2}$$

(5B) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

Aufgabe 2: Kombination von Ableitungsregeln

Bilden Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(6) $y = r\,\dfrac{x^n - 1}{x - 1} - K_0 x^n$

(7) $y = (ax + b)^2 e^x$

(8) $y = \dfrac{e^{-cx}}{x}$

(9) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{1 + \ln x}$

10) $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}}$

Aufgabe 3: Nutzungsdauer, Ableitung

Schreiben Siue die Formel für die durchschnittlichen monatlichen Kosten $k(t)$ für Wertminderung, Reparatur und Wartung eines Autos aus Kap 2.1 Aufgabe 3 auf.

(a) Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion $k'(t)$.

(b) Berechnen Sie die durchschnittlichen monatlichen Kosten für eine Nutzungsdauer von 2, 4 und 6 Jahren (t = 24, 48, 72 Monate), sowie für eine um jeweils 2 Monate längere Nutzungsdauer (t = 26, 50, 74) und daraus die Differenzenquotienten

$DQ(t = 24, \Delta t = 2)$, $DQ(t = 48, \Delta t = 2)$, $DQ(t = 72, \Delta t = 2)$.

Setzen Sie die Zahlenergebnisse in eine Aussage über den Verlauf der Kostenfunktion um.

(c) Berechnen Sie an den Stellen t = 24, 48, 72 auch die Ableitung und vergleichen Sie die Werte mit den Differenzenquotienten.

t	**k(t)**	**k(t+2)**	**DQ(t, Dt = 2)**	**k´(t)**
24				
48				
72				

3.4 PC-Unterstützung

3.4.1 Symbolische Operationen: DERIVE

1: $Z(t) := p \, \mathrm{EXP}(-c\,t)$

2: $G(t) := a\,t^{2}$

3: $K(t) := \dfrac{p - Z(t) + G(t)}{t}$

4: $\dfrac{d}{dt} K(t)$

5: $\left[\dfrac{c\,p}{t} + \dfrac{p}{t^{2}} \right] \hat{e}^{-c\,t} + \dfrac{a\,t^{2} - p}{t^{2}}$

6: $\lim\limits_{t \to 0} K(t)$

7: $c\,p$ (= 327.32)

3.4.2 Numerische Operationen: EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	Z	G	k(t)	k(t+2)	DQ	k´
2	0	17000,00	0,00				
3	12	13493,57	225,00	310,95	308,74	-1,11	-1,14
4	24	10710,38	900,00	299,57	298,09	-0,74	-0,77
5	36	8501,25	2025,00	292,33	291,48	-0,43	-0,45
6	48	6747,78	3600,00	288,59	288,27	-0,16	-0,18
7	60	5355,98	5625,00	287,82	287,94	0,06	0,05
8	72	4251,25	8100,00	289,57	290,08	0,25	0,24