Einführunsbeispiel

Von drei Milchsorten sind Fettgehalt und Preise je Liter bekannt:

Sorte	**A**	**B**	**C**
Fettgehalt	3%	4%	6%
Literpreis	0,60 €	0,90 €	1,20 €

Wir möchten eine Mischung von einem Liter Milch mit einem Fettanteil von 3,5% herstellen.

Beispiel: Fettgehalt der Milch

Sorte	A	B	C	Soll
Fettgehalt	3%	4%	6%	3,5%
Kosten	0,60	0,90	1,20	

Mathematisches Modell:

x_1, x_2 und x_3 = Mengen der Sorten A, B und C.

Gesamtmenge ein Liter:

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Fettgehalt der Mischung:

(2) $0{,}03\, x_1 + 0{,}04\, x_2 + 0{,}06\, x_3 = 0{,}035$

Kosten:

(3) $K = 0{,}60\, x_1 + 0{,}90\, x_2 + 1{,}20\, x_3$

"Anteile" im Bereich 0 bis 1: $0 \le x_i \le 1$ $(i = 1, 2, 3)$.

Beispiel: Fettgehalt der Milch

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

(1') $x_3 = 1 - x_1 - x_2$

eingesetzt in (2):

(2) $0{,}03\ x_1 + 0{,}04\ x_2 + 0{,}06\ x_3 = 0{,}035$

(2') $0{,}03\ x_1 + 0{,}04\ x_2 + 0{,}06\ (1 - x_1 - x_2) = 0{,}035$

$-0{,}03\ x_1 - 0{,}02\ x_2 + 0{,}06 = 0{,}035 \quad |\ \times 100$

$-3\ x_1 - 2\ x_2 + 6 = 3{,}5$

$-3\ x_1 = -2{,}5 + 2x_2 \quad |\ :(-3)$

(4) $x_1 = 5/6 - 4/6\ x_2$

(1') $x_3 = 1 - (-4/6\ x_2 + 5/6) - x_2$

$x_3 = 1 + 4/6\ x_2 - 5/6 - x_2$

(5) $x_3 = 1/6 - 2/6\ x_2$

Beispiel: Fettgehalt der Milch

(4) $x_1 = 5/6 - 4/6\, x_2$

(5) $x_3 = 1/6 - 2/6\, x_2$

Die Ergebnisse (4) und (5) können wir in die Kostenfunktion einsetzen, so dass die Kosten allein durch x_2 bestimmt sind:

(3) $K = 0{,}60\, x_1 + 0{,}90\, x_2 + 1{,}20\, x_3$

$K = 0{,}60\, (- 4/6\, x_2 + 5/6) + 0{,}90\, x_2 + 1{,}20\, (1/6 - 2/6\, x_2)$

$K = -0{,}40\, x_2 + 0{,}50 + 0{,}90\, x_2 + 0{,}20 - 0{,}40\, x_2$

$K = 0{,}10\, x_2 + 0{,}70$

Beispiel: Fettgehalt der Milch

$K = 0{,}10\, x_2 + 0{,}70$

Die Kosten sind am geringsten, wenn x_2 so klein wie möglich gewählt wird und am höchsten, wenn x_2 so groß wie möglich gewählt wird.

Die zugehörigen Werte für x_1 und x_3 finden wir aus (4) und (5).

(4) $x_1 = 5/6 - 4/6\, x_2$

(5) $x_3 = 1/6 - 2/6\, x_2$

Beispiel: Fettgehalt der Milch

$K = 0{,}10\, x_2 + 0{,}70$

Kostenoptimal ist somit die obige

Lösung 2: $x_1 = 5/6$, $\mathbf{x_2 = 0}$, $x_3 = 1/6$. Kosten: $K = 0{,}70$

Bei der ungünstigsten Mischung müssen wir beachten, dass neben x_2 auch x_1 und x_3 im Bereich 0 bis 1 liegen müssen. Wegen (5) dürfen wir nicht $x_2 = 1$ wählen, sondern maximal $x_2 = 0{,}5$, weil sonst x_3 negativ wäre.

Die kostenungünstigste Lösung ist also die obige

Lösung 1: $x_1 = 0{,}5$, $\mathbf{x_2 = 0{,}5}$, $x_3 = 0$. Kosten: $K = 0{,}75$

Der Spielraum für die Kosten ist ziemlich eng:

$0{,}70 \leq K \leq 0{,}75$.