Prof. Dr. Siegfried Zseby
Wirtschaftsmathematik - Teil 3 - Analysis

Kapitelübersicht

Im Gegensatz zur Linearen Algera werden in der Analysis ***nichtlineare*** *Funktionen untersucht. Für die Ökonomie ist insbesondere die Optimierung solcher Funktionen von großer Bedeutung. Ein wesentliches Hilfsmittel dazu ist die Differentialrechnung.*

Kapitel 1 - Einführungsbeispiel: Die optimale Currywurst

Inhaltsübersicht zum Kapitel 1

Im Einführungsbeispiel werden die Aufgaben, die für mathematische Modelle in der Ökonomie typisch sind, nacheinander behandelt.

1.1 Die Aufgabe

Für den Zusammenhang zwischen dem Preis p einer Ware und der abgesetzten Menge x wird in dem interessierenden Bereich ein linearer Zusammenhang vorausgesetzt:

$$x = a \cdot p + b \quad (a < 0)$$

Für ein Zahlenbeispiel zur Bestimmung der Parameter x_0 und c nehmen wir an, dass sich zum Preis p = 1,25 € täglich 100 Currywürste und zum Preis p = 1,50 € täglich nur 80 Currywürste verkaufen lassen. Der Einkaufspreis wird mit k = 0,10 € angesetzt.

(A0) Ermitteln Sie die **Parameter** a und b.

(A1) Ermitteln Sie für einen Preis p = 0,75 € den Absatz x, den Umsatz $U = p \cdot x$, die Kosten $K = k \cdot x$, und den Gewinn G = U - K.

(A2) Berechnen Sie diejenigen Preise, für die
(a) der Absatz. x = 150 erzielt wird
(b) der Gewinn Null wird.

(A3) Berechnen Sie diejenigen Preise, für die
(a) der Absatz x erzielt wird
(b) der Gewinn G wird.

(A4) Berechnen Sie denjenigen **Preis, für den der Gewinn maximal wird** und die zugehörigen Werte für Absatz, Umsatz, Kosten und Gewinn.

1.2 Lösung

1.2.0 (A0) Ermittlung der Parameter

$a\,p + b = x$

$a \cdot 1{,}25 + b = 100$ (1)

$a \cdot 1{,}50 + b = 80$ (2)

(1) - (2):

$-0{,}25\,a = 20$

$\mathbf{a = -80}$

(2): $\mathbf{b = 200}$

$\mathbf{x = -80\,p + 200}$

1.2.1 (A1) Ausrechnen vorwärts (Enumeration)

Preis: $\mathbf{p = 0{,}75}$

Absatz: $x = 200 - 80\,p = 140$

Umsatz: $U = p\,x = 105$

Kosten: $K = k\,x = 14$

Gewinn: $G = U - K$

$= (p - k)\,x = (p - k)\,(a\,p + b)$

$= a\,p^2 + (b - ka)\,p - k\,b$

$\mathbf{= 91}$

1.2.2 (A2) Ausrechnen rückwärts (Zielsuche)

(a) $\mathbf{x = 150}$

$200 - 80\,p = 150$

$80\,p = 50$

$\mathbf{p = 0{,}625}$

(b) $\mathbf{G = 0}$

$(p - k)\,(a\,p + b) = 0$

$(p - 0{,}10)\,(-80\,p + 200) = 0$

$\mathbf{p = 0{,}10}$ **oder** $\mathbf{p = 2{,}50}$

1.2.3 (A3) Die Umkehrfunktion (Inversion)

(a) $200 - 80\,p = x$

$80\,p = -x + 200$

$\mathbf{p = -0.0125\,x + 2{,}50}$

(b) $a\,p^2 + (b - ka)\,p - k\,b = G$

$- 80\ p^2 + (200 + 0.10 \cdot 80)\ p - 0{,}10 \cdot 200 = G$

$- 80\ p^2 + 208\ p - 20 - G \quad = 0$

$p^2 - 2{,}60\ p + (0{,}25 + 0{,}0125\ G) \quad = 0$

$$p_{1,2} = 1{,}30 \pm \sqrt{1{,}30^2 - \left(0{,}25 + 0{,}0125\ G\right)}$$

$$\boxed{p_{1,2} = 1{,}30 \pm \sqrt{1{,}44 - 0{,}0125\ G}}$$

1.2.4 (A4) Optimierung

Den optimalen Preis erhält man durch Nullsetzen der Ableitung:

$G \quad = a\ p^2 + (b - ka)\ p - k\ b$

$G' \quad = 2\ a\ p + (b - k\ a)$

$\quad = - 160\ p + 208 \quad = 0$

$\mathbf{p \quad = \ 1{,}30}$

und den zugehörigen maximalen Gewinn durch Einsetzen in die Gewinnfunktion:

$\mathbf{G} \quad = (p - k)\ (a\ p + b)$

$\quad = (1{,}30 - 0{,}10)\ (- 80 \cdot 1{,}30 + 200)$

$\mathbf{= \ 115{,}20}$

Den optimalen Preis erhält man auch (ohne Ableitung) durch die Bedingung, dass es bei der Inversion genau noch eine Lösung gibt:

$$p_{1,2} = 1{,}30 \pm \sqrt{1{,}30^2 - \left(0{,}25 + 0{,}0125\ G\right)}$$

p = 1,30

1,44 - 0.0125 G = 0

G = 115,20

Zusatzaufgabe

Wie ändert sich die Lösung, wenn die Kostenfunktion um Fixkosten erweitert wird:
$K = k\ x + k_0$?

Lösung: